

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

1. Загальна інформація про курс

Назва курсу, мова викладання	Опуклий аналіз Мова викладання: українська
Викладачі	Гудима Уляна Василівна, доцент кафедри математики
E-mail	ulag2107@gmail.com
Сторінка курсу в MOODLE	https://moodle.kpnu.edu.ua/course/view.php?id=6508
Консультації	Проведення очних консультацій

2. Анотація до курсу

Дисципліна «Опуклий аналіз» належить до навчальних дисциплін, які забезпечують професійний розвиток студентів математичних спеціальностей та спрямовані на більш повне, глибоке та детальне засвоєння деяких розділів математики. Зокрема, навчальна дисципліна передбачає вивчення основних понять, тверджень, теорем, що стосуються властивостей опуклих множин та опуклих функцій, субдиференціального числення опуклих функцій та їх застосування при дослідженні задачі опуклого програмування.

3. Мета та цілі курсу

Метою вивчення навчальної дисципліни «Опуклий аналіз» є оволодіння студентами загальними властивостями лінійних і лінійних топологічних просторів, теорією опуклих множин цих просторів та опуклих функцій, заданих на них, теорією двоїстості опуклих функцій та їх субдиференціальним численням.

4. Формат курсу

Стандартний очний курс.

5. Результати навчання

Очікувані результати навчання з дисципліни «Опуклий аналіз»:

знати:

- необхідні відомості з теорії топологічних, метричних, лінійних, лінійних нормованих, лінійних топологічних просторів;
- властивості опуклих множин лінійних і лінійних топологічних просторів;
- властивості опуклих оболонок множин лінійних та лінійних топологічний просторів;
- теорему Каратеодорі;
- теорему Гана-Банаха та наслідки з неї;
- теореми віддільності двох опуклих множин;
- поняття ефективної множини та надграфіка функції, власної функції, опуклої функції;
- критерій опуклості власної функції;
- умови неперервності опуклої функції;
- поняття замкнутої, півнеперервної знизу функції та зв'язок між ними;
- умови існування точки мінімуму;
- поняття спряженої функції. Властивості спряжених функцій;
- теореми Мінковського та Фенхеля- Моро;

- властивості додатно однорідних та сублінійних функцій. Теореми двоїстості для сублінійних функцій;
- поняття похідної за напрямком та її властивості;
- поняття субградієнта та субдиференціала. Властивості субдиференціала;
- зв'язок між похідною за напрямком і опорною функцією субдиференціала цієї функції;
- критерій точки глобального мінімуму;
- основні теореми про субдиференціал. (теорема Моро-Рокафеллара про субдиференціал суми кількох опуклих функцій, теорема Дубовицького-Мілютіна про субдиференціал максимуму кількох опуклих функцій);
- необхідні та достатні умови оптимального розв'язку задачі опуклого програмування.

вміти:

- встановлювати різного роду співвідношення між множинами топологічних, метричних, лінійних, лінійних нормованих та лінійних топологічних просторів;
- з'ясовувати питання щодо опуклості множин лінійного та лінійного топологічного простору, їх віддільності та неперетинності;
- досліджувати функції, задані на лінійних та лінійних топологічних просторах на опуклість, знаходити функції, спряжені до них;
- знаходити субградієнти та субдиференціали опуклих функцій, похідні цих функцій за напрямком з допомогою зв'язку між похідною функції за напрямком та їх субдиференціалом у відповідній точці;
- використовувати необхідні та достатні умови оптимального розв'язку задачі опуклого програмування для відшукування цього розв'язку.

6. Обсяг і ознаки курсу

Найменування показників	Характеристика навчального курсу
	Денна форма навчання
Освітня програма, спеціальність	Математика, інформатика, 014.04 Середня освіта (Математика)
Рік навчання	третій/2020-2021
Семестр вивчення	шостий
Нормативна/вибіркова	вибіркова
Кількість кредитів ЄКТС	7
Загальний обсяг годин	210
Кількість годин навчальних занять	70
Лекційні заняття	40
Практичні заняття	30
Семінарські заняття	-
Лабораторні заняття	-
Самостійна та індивідуальна робота	140 год.
Форма підсумкового контролю	екзамен

7. Пререквізити курсу

Передумовами для вивчення дисципліни є вивчення математичного аналізу, лінійної алгебри, дискретної математики, функціонального аналізу.

8. Технічне й програмне забезпечення

Вивчення курсу не потребує використання програмного забезпечення.

9. Політика курсу

Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції і практичні заняття курсу.

Студент повинен відпрацювати або перездати певний вид роботи у випадках:

- студент пропустив лекційне заняття (у цьому випадку студент зобов'язаний самостійно оволодіти пропущеним матеріалом та відповідати на питання в межах вивченого теоретичного матеріалу);
- студент пропустив практичне заняття (у цьому випадку студент зобов'язаний самостійно оволодіти пропущеним матеріалом та уміти застосовувати його на практиці; відпрацьоване заняття оцінюється);
- якщо під час практичних занять студент отримав незадовільну оцінку (у цьому випадку студент зобов'язаний сумлінно оволодіти матеріалом та вміннями застосовувати його на практиці; відпрацьоване заняття оцінюється).

При умові відсутності заборгованостей та написанні модульних контрольних робіт на позитивну оцінку, залік виставляється автоматично.

10. Схема курсу

Змістовий модуль 1. Необхідні відомості з функціонального аналізу. Опуклі множини

Тема	Форма заняття	Завдання	Вага оцінки
Тема 1. Топологічні простори. – Топологічні простору; – Відкриті та замкнені множини топологічного простору; – Критерій відкритої множини топологічного простору	Лекція (2 год). Практичне заняття (2 год).	Розглянути поняття топологічного простору, різні приклади топологічних просторів, встановити властивості відкрити та замкнених множин топологічного простору.	Відповідь на практичних заняттях оцінюється по 12-бальній системі оцінювання.
Тема 2. Метричні простори як часткові випадки топологічних просторів. Лінійні простори над полем дійсних чисел. Лінійні нормовані простори. – Означення метричного простору. Приклади. Відкриті множини метричного простору. – Метрична топологія. – Компактні множини метричного простору. – Лінійні простори над полем дійсних чисел. Приклади. – Підпростір лінійного простору. Алгебраїчна сума двох множин лінійного	Лекція (4 год). Практичне заняття (4 год). Самостійна робота (5 год).	Розглянути поняття метричного простору; метричної топології; лінійного простору над полем дійсних чисел; підпростіру лінійного простору; лінійного нормованого простору. Питання для самостійного опрацювання: – Віддільні (гаусдорфові) топологічні простори; – Компакти. Компактні множини топологічних просторів.	Відповідь на практичних заняттях оцінюється по 12-бальній системі оцінювання.

простору. Добуток числа на множину лінійного простору. – Лінійні нормовані простори. Задання метрики в лінійному нормованому просторі. – Неперервність операцій додавання двох елементів лінійного нормованого простору та множення числа на елемент цього простору			
Тема 3. Лінійні топологічні простори. – Лінійні топологічні простори (л.т.п.). Приклади. – Зсув відкритої множини л.т.п. на елемент цього простору, добуток відкритої множини л.т.п. на відмінне від нуля число. – Базиси околів нуля л.т.п. та довільної точки цього простору, зв'язок між ними. – Поглинаючі та зрівноважені множини л.т.п. – Базис околів нуля л.т.п. який складається з поглинаючих та зрівноважених околів. – Обмежені множини л.т.п. Критерій обмеженості множини. – Критерій віддільності л.т.п. – Замикання множини л.т.п.	Лекція (2 год). Практичне заняття (2 год). Самостійна робота (5 год).	Розглянути поняття лінійного топологічного простору, базису околів нуля л.т.п. та довільної точки цього простору, зв'язок між ними, поглинаючої та зрівноваженої множини л.т.п. Питання для самостійного опрацювання: – Обмежені множини л.т.п. Критерій обмеженості множини. – Критерій віддільності л.т.п.	Відповідь на практичних заняттях оцінюється по 12-бальній системі оцінювання.
Тема 4. Опуклі множини лінійних просторів. Опуклі оболонки множини. Опуклі множини л.т.п. – Відрізок лінійного простору. – Поняття опуклої множини лінійного простору. Приклади опуклих множин. – Властивості опуклих множин лінійного простору. – Опукла комбінація точок лінійного простору. – Опукла оболонка множини лінійного простору. – Властивості опуклої оболонки множини. Теорема Каратеодорі. – Опуклі множини л.т.п. - Властивості опуклих множин	Лекція (4 год). Практичне заняття (4 год). Самостійна робота (18 год).	Розглянути поняття опуклої множини лінійного простору, опуклої оболонки множини, опуклої множини л.т.п.: Питання для самостійного опрацювання: – Опукла комбінація точок лінійного простору. – Опукла оболонка множини лінійного простору. – Властивості опуклої оболонки множини. Теорема Каратеодорі.	Відповідь на практичних заняттях оцінюється по 12-бальній системі оцінювання.

Л.Т.П.			
Тема 5. Функціонали. Неперервні функціонали. Лінійні функціонали. – Функціонали. Неперервні функціонали. – Критерій неперервності функціонала. – Лінійні функціонали. Лінійні неперервні функціонали, задані на л.т.п. та деякі їх властивості. – Простір спряжений з л.т.п.	Лекція (4 год). Практичне заняття (2 год). Самостійна робота (5 год).	Розглянути поняття функціонала, лінійного функціоналу, лінійного неперервного функціоналу, заданого на л.т.п. та деякі їх властивості. Питання для самостійного опрацювання: – Простір, спряжений до лінійного топологічного простору. – Конуси з вершиною в точці 0 та деякі їх властивості.	
Тема 6. Теореми про віддільність двох опуклих множин л.т.п.	Лекція (2 год). Самостійна робота (17 год).	Розглянути поняття замкнених гіперплощин, відкритих та замкнених півпросторів лінійного топологічного простору, теорему Гана-Банаха в геометричній формі в л.т.п., перша теорема віддільності двох опуклих множин л.т.п. Питання для самостійного опрацювання: – Поняття локально опуклого лінійного топологічного простору. – Друга теорема віддільності.	
Мкр №1	Практичне заняття (2 год).	Модульна контрольна робота містить 3 питання. Кожне питання максимально оцінюється у 6 балів.	Максимально можна отримати за написання МКР 18 балів. Модульну контрольну роботу, оцінену менше ніж на 18 балів, потрібно виконати повторно.

Змістовий модуль 2. Опуклі функції, їх спряжені функції

Тема	Форма заняття	Завдання	Вага оцінки
Тема 1. Опуклі функції та їх властивості. – Поняття ефективної області та надграфіка функції, власної функції. – Опуклі функції та їх властивості. Приклади опуклих функцій. – Критерій опуклості власної функції. – Умова, за якої опукла функція дорівнює на внутрішності її ефективної області. – Властивості опуклих функцій. – Нерівність Ієнсена.	Лекція (4 год). Самостійна робота (5 год).	Розглянути поняття ефективної області, надграфіка функції, власної функції; опуклої функції та їх властивості, критерій опуклості власної функції, властивості опуклих функцій. Питання для самостійного опрацювання: – Умова, за якої опукла функція дорівнює на внутрішності її ефективної області. – Нерівність Ієнсена.	
Тема 2. Неперервність опуклих функцій. Замкнені, півнеперервні знизу функції, зв'язок між ними та їх властивості. – Неперервність опуклих функцій. – Критерій неперервності власної опуклої функції в точці її ефективної області. – Умови, за яких опукла функція задовольняє умові Ліпшиця. – Замкнені, півнеперервні знизу функції, зв'язок між ними та їх властивості.	Лекція (4 год). Практичне заняття (2 год). Самостійна робота (5 год).	Розглянути поняття неперервності опуклої функції, критерій неперервності власної опуклої функції в точці її ефективної області. Питання для самостійного опрацювання: – Замкнені, півнеперервні знизу функції, зв'язок між ними та їх властивості.	Відповідь на практичних заняттях оцінюється по 12-бальній системі оцінювання.
Тема 3. Спряжені функції (поляри). – Поняття спряженої функції (поляри). – Властивості спряженої функції. – Друга спряжена функція (біполяра) та її властивості. – Критерій опуклості та замкненості власної функції (теорема Мінковського). – Критерій співпадання функції	Лекція (2 год). Практичне заняття (2 год). Самостійна робота (20 год).	Розглянути поняття спряженої функції (поляри), властивості спряженої функції, теорему Мінковського. Питання для самостійного опрацювання: – Друга спряжена функція (біполяра) та її властивості.	Відповідь на практичних заняттях оцінюється по 12-бальній системі оцінювання.

та її біполяра (теорема Фенхеля-Моро).		– Критерій співпадання функції та її біполяра (теорема Фенхеля-Моро).	
Тема 4. Сублінійні функції. Похідна функції в точці за напрямком та її властивості. – Поняття сублінійної функції. – Критерій опуклості власної додатно однорідної функції. – Властивості додатно однорідних та сублінійних функцій. – Зв'язок між сублінійною функцією та опорною функцією ефективної області, її поляри. – Теорема двоїстості для сублінійних функцій. – Похідна функції в точці за напрямком та її властивості. – Існування та сублінійність похідної за напрямком власної опуклої функції в точках її ефективної області.	Лекція (2 год). Практичне заняття (4 год). Самостійна робота (5 год).	Розглянути поняття сублінійної функції, критерій опуклості власної додатно однорідної функції, властивості додатно однорідних та сублінійних функцій, зв'язок між сублінійною функцією та опорною функцією ефективної області, її поляри. Питання для самостійного опрацювання: – Похідна функції в точці за напрямком та її властивості. – Існування та сублінійність похідної за напрямком власної опуклої функції в точках її ефективної області.	Відповідь на практичних заняттях оцінюється по 12-бальній системі оцінювання.
Тема 5. Субградієнт та субдиференціал функції в точці. Приклади обчислення субдиференціалів. – Субградієнт та субдиференціал функції в точці. – Властивості субдиференціала. – Різні означення субдиференціала та їх еквівалентність. – Критерій точки глобального мінімуму опуклої власної функції. – Зв'язок між субдиференціалом і похідною за Гато диференційової за Гато функції. – Приклади обчислення субдиференціалів. Тема	Лекція (2 год). Практичне заняття (2 год). Самостійна робота (5 год).	Розглянути поняття субградієнта та субдиференціала функції в точці, властивості субдиференціала, критерій точки глобального мінімуму опуклої власної функції. Питання для самостійного опрацювання: – Зв'язок між субдиференціалом і похідною за Гато диференційової за Гато функції.	Відповідь на практичних заняттях оцінюється по 12-бальній системі оцінювання.
Тема 6. Постановка задачі	Лекція (4 год).	Розглянути	

опуклого програмування. Теорема Куна-Таккера	Самостійна робота (20 год).	постановка задачі опуклого програмування, теорема Куна-Таккера Питання для самостійного опрацювання: – Опрацювати доведення теорема Куна-Таккера	
Тема 7. Теорема Дубовицького-Мілютіна про субдиференціал максимуму кількох функцій – Основні теореми про субдиференціали. – Теорема Моро-Рокафеллара про субдиференціал суми кількох опуклих функцій. – Теорема Дубовицького-Мілютіна про субдиференціал максимуму кількох опуклих функцій.	Лекція (4 год). Практичне заняття (2 год). Самостійна робота (20 год).	Розглянути основні теореми про субдиференціали, теорему Моро-Рокафеллара про субдиференціал суми кількох опуклих функцій, теорему Дубовицького-Мілютіна про субдиференціал максимуму кількох опуклих функцій. Питання для самостійного опрацювання: – Опрацювати доведення теореми Моро-Рокафеллара та теореми Дубовицького-Мілютіна	Відповідь на практичних заняттях оцінюється по 12-бальній системі оцінювання.
Мкр №2	Практичне заняття (2 год).	Модульна контрольна робота містить 3 питання. Кожне питання максимально оцінюється у 6 балів.	Максимально можна отримати за написання МКР 18 балів. Модульну контрольну роботу, оцінену менше ніж на 11 балів, потрібно виконати повторно.

11. Система оцінювання та вимоги

Критерії оцінювання результатів Поточний контроль на практичних заняттях - 20 балів. Оцінювання на практичних заняттях відбувається за 12 бальною системою відповідно до критеріїв визначених Тимчасовим положенням про рейтингову систему оцінювання навчальних досягнень Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка (зі змінами та доповненнями).

Модульні контрольні роботи № 1, 2 – по 18 балів.

Кожна робота містить по 3 питання. За відповіді на питання бали нараховуються відповідно до таких критеріїв:

6 балів	Студент виявляє глибокі фундаментальні знання, повно викладає вивчений матеріал, розуміє можливість різних тлумачень однієї і тієї ж проблеми, вміє оцінювати аргументи для її доведення, формулює своє бачення проблеми, виявляє розуміння матеріалу, може обґрунтувати судження, застосувати знання на практиці у нестандартних ситуаціях, наводити необхідні приклади, викладає матеріал логічно, послідовно.
5 бали	Студент виявляє достатні знання теорії, повно викладає вивчений матеріал, виявляє розуміння предмета висловлення, але при цьому студент допускає 1-2 несуттєвих помилки або 1-2 недоліки в послідовності викладу матеріалу. Студент вміє наводити власні приклади на підтвердження нових думок, може застосувати вивчений матеріал у стандартних та дещо змінених ситуаціях.
4 бали	Студент виявляє достатні знання теорії, повно викладає вивчений матеріал, виявляє розуміння предмета висловлення, але при цьому студент допускає 1-2 несуттєвих помилки і 1-2 недоліки в послідовності викладу матеріалу. Студент вміє наводити власні приклади на підтвердження нових думок, може застосувати вивчений матеріал у стандартних та дещо змінених ситуаціях.
3 бали	Якщо студент виявляє знання і розуміння основних положень предмета, але викладає матеріал неповно: правильно формулює означення та теореми, але не спроможний їх доводити. Не вміє досить глибоко і доказово обґрунтовувати свої судження і наводити приклади.
2 бали	Якщо студент виявляє незнання більшої частини вивченого матеріалу. Допускає помилки у формулюванні понять, які спотворюють їх зміст, не вміє самостійно побудувати систему вивчення певних тем, хаотично і невпевнено викладає матеріал. Студент неспроможний виконати стандартні завдання навіть після навідних запитань викладача.
1 бал	Якщо студент виявляє повне незнання частини вивченого матеріалу.

Модульну контрольну роботу, оцінену менше ніж на 11 балів, потрібно виконати повторно.

РОЗПОДІЛ БАЛІВ ЗА ЗМІСТОВИМИ МОДУЛЯМИ :

Поточний і модульний контроль (100 балів)				іспит	Разом
Змістовий модуль 1 (50 балів)		Змістовий модуль 2 (50 балів)			
Поточний контроль	МКР	Поточний контроль	МКР	40	100
12 балів	18 балів	12 балів	18 балів		

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

ОСНОВНА

1. Моклячук М.П. Методы оптимизации / М.П. Моклячук. – К.: УМК ВО, 1990. – 140 с.
2. Моклячук М.П. Основи опуклого аналізу. Навчальний посібник / М.П. Моклячук. – К.: Видавництво ТВіМС, 2004. – 240 с.
3. Моклячук М.П. Негладкий аналіз та оптимізація: навчальний посібник / М.П. Моклячук. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2008. – 399 с.
4. Моклячук М.П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. Підручник / М.П. Моклячук. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2009. – 380 с.
5. Половинкин Е.С. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа / Е.С. Половинкин, М.В. Балашов. – М.: Физматлит, 2004. – 416 с.
6. Стрекаловский А.С. Введение в выпуклый анализ: учебное пособие / А.С. Стрекаловский. – Иркутск: Иркутский университет, 2009. – 81с.

ДОПОМІЖНА

1. Алексеев В.М. Оптимальное управление/ В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
2. Базара М. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы/ М. Базара, К. Шетти. – М.: Мир, 1982. – 583 с.
3. Галеев Э.М. Краткий курс теории экстремальных задач/ Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 204 с.
4. [Гольштейн Е.Г.](#) Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения/ Е.Г. Гольштейн. – М.: Наука, 1971. – 352 с.
5. Гудима У.В. Лінійне програмування в прикладах і задачах: навчальний посібник / У.В. Гудима. – Кам'янець-Подільський: «Медобори – 2006», 2012. – 104 с.
6. Экланд И. Выпуклый анализ и вариационные проблемы / И. Экланд, Р. Темам. – М.: Мир, 1979. – 399 с.
7. Жалдак М.І. Основи теорії і методів оптимізації: навчальний посібник / М.І. Жалдак, Ю.В. Триус. – Черкаси: Брама-Україна, 2005. – 608 с.
8. Иоффе А.Д. Теория экстремальных задач / А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров – М.: Наука, 1974. – 481 с.

9. Кадец В.М. Курс функционального анализа: учебное пособие для студентов механико-математического факультета / В.М. Кадец. – Х.: ХНУ имени В.Н. Каразина, 2006. – 607 с.
10. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1989. – 623 с.
11. Лейхтвейс К. Выпуклые множества / К. Лейхтвейс. – М.: Наука, 1985. – 335 с.
12. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. – М.: Мир, 1975. – 496 с.
13. Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Высшая школа, 1982. – 272 с.
14. Магарил-Ильяев Г.Г. Выпуклый анализ и его приложения / Г.Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 176 с.
15. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика / Х. Никайдо – М.: Мир, 1972. – 518 с.
16. Обен Ж.-П. Прикладной нелинейный анализ / Ж.-П. Обен, И. Экланд. – М.: Мир, 1988. – 512 с.
17. Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения / Ж.-П. Обен. – М.: Мир, 1988. – 264 с.
18. Петров Н.Н. Введение в выпуклый анализ: учебное пособие / Н.Н. Петров. – Ижевск: Удмуртский государственный университет, 2009. – 168 с.
19. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи / Б.Н. Пшеничный. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
20. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума / Б.Н. Пшеничный. – М.: Наука, 1982. – 144 с.
21. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар. – М.: Мир, 1973. – 470 с.
22. Тихомиров В.М. Выпуклый анализ / В.М. Тихомиров // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики, фундаментальные направления». Т.14. – М.: ВИНТИ, 1987. – С. 5-101.
23. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений / В.М. Тихомиров. – М.: МГУ, 1976. – 304 с.
24. Ус С.А. Функціональний аналіз: навчальний посібник / С.А. Ус. – Дніпропетровськ: Національний гірничий університет, 2013. – 236 с.