

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

1. Загальна інформація про курс

Назва курсу, мова викладання	ТЕОРІЯ БАГАТОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ Мова викладання: українська
Викладачі	Гудима Уляна Василівна, доцент кафедри математики
E-mail	ulag2107@gmail.com
Сторінка курсу в MOODLE	https://moodle.kpnu.edu.ua/course/view.php?id=6513
Консультації	Проведення очних консультацій

2. Анотація до курсу

Дисципліна «Теорія багатозначних відображень» належить до навчальних дисциплін, які забезпечують професійний розвиток студентів математичних спеціальностей та спрямовані на більш повне, глибоке та детальне засвоєння деяких розділів математики. Зокрема, навчальна дисципліна передбачає вивчення основних понять, тверджень, теорем функціонального аналізу, зокрема, що стосуються властивостей опуклих множин та опуклих функцій, розглядається поняття багатозначних відображень, відстанні Хаусдорфа між множинами, неперервного селектора та теореми Майкла.

3. Мета та цілі курсу

Мета вивчення навчальної дисципліни «Теорія багатозначних відображень задач» є оволодіння студентами загальними властивостями лінійних і лінійних топологічних просторів, лінійних нормованих просторів, опуклих множин цих просторів та опуклих функцій, метрики Хаусдорфа (Відстань між множинами), багатозначних відображень, Теоремою Майкла і неперервних селекторів.

4. Формат курсу

Стандартний очний курс.

5. Результати навчання

Програмні компетентності навчання:

- здатність використовувати системні знання з математики;
- здатність ефективно застосувати ґрунтовні знання змісту шкільної математики.
- здатність аналізувати математичну задачу, розглядати різні способи її розв'язування;
- здатність формувати в учнів переконання в необхідності обґрунтування гіпотез, розуміння математичного доведення.

Очікувані результати навчання з дисципліни «Теорія багатозначних відображень» відповідно до освітньо-професійної програми:

знати:

- необхідні відомості з теорії топологічних, метричних, лінійних, лінійних нормованих, лінійних топологічних просторів;
- властивості опуклих множин лінійних і лінійних топологічних просторів;
- властивості опуклих оболонок множин лінійних та лінійних топологічний просторів;
- Метрика Хаусдорфа. Відстань між множинами.
- Багатозначні відображення. Півнеперервні зверху та півнеперервні знизу багатозначні відображення.
- Вимірні багатозначні відображення. Вимірні селектори.
- Теорема Майкла і неперервні селектори.

вміти:

- встановлювати різного роду співвідношення між множинами топологічних, метричних, лінійних, лінійних нормованих та лінійних топологічних просторів;
- з'ясовувати питання щодо опуклості множин лінійного та лінійного топологічного простору, їх віддільності та неперетинності;
- досліджувати функції, задані на лінійних та лінійних топологічних просторах на опуклість, знаходити функції, спряжені до них;
- розглядати метрику Хаусдорфа у різних часткових випадках;
- практичне застосування теореми Майкла.

6. Обсяг і ознаки курсу

Найменування показників	Характеристика навчального курсу
	Денна форма навчання
Освітня програма, спеціальність	Математика, інформатика, 014.04 Середня освіта (Математика)
Рік навчання	2
Семестр вивчення	4
Кількість кредитів ЄКТС	6,5
Загальний обсяг годин	195
Кількість годин навчальних занять	66
Лекційні заняття	40
Практичні заняття	26
Семінарські заняття	-
Лабораторні заняття	-
Самостійна та індивідуальна робота	129 год.
Форма підсумкового контролю	екзамен
Рік навчання	2

7. Пререквізити курсу

Передумовами для вивчення дисципліни є вивчення математичного аналізу, лінійної алгебри, дискретної математики, функціонального аналізу.

8. Технічне й програмне забезпечення

Вивчення курсу не потребує використання програмного забезпечення.

9. Політика курсу

Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції і практичні заняття курсу.

Студент повинен відпрацювати або перездати певний вид роботи у випадках:

- студент пропустив лекційне заняття (у цьому випадку студент зобов'язаний самостійно оволодіти пропущеним матеріалом та відповідати на питання в межах вивченого теоретичного матеріалу);
- студент пропустив практичне заняття (у цьому випадку студент зобов'язаний самостійно оволодіти пропущеним матеріалом та уміти застосовувати його на практиці; відпрацьоване заняття оцінюється);
- якщо під час практичних занять студент отримав незадовільну оцінку (у цьому випадку студент зобов'язаний сумлінно оволодіти матеріалом та вміннями застосовувати його на практиці; відпрацьоване заняття оцінюється).

При умові відсутності заборгованостей та написанні модульних контрольних робіт на позитивну оцінку, залік виставляється автоматично.

10. Схема курсу

Тема	Форма заняття	Завдання	Вага оцінки
Тема 1. Топологічні простори. – Топологічні простору; – Відкриті та замкнені множини топологічного простору; – Критерій відкритої множини топологічного простору	Лекція (4 год). Практичне заняття (2 год).	Розглянути поняття топологічного простору, різні приклади топологічних просторів, встановити властивості відкрити та замкнених множин топологічного простору.	Відповідь на практичних заняттях оцінюється по 12-бальній системі оцінювання.
Тема 2. Метричні простори як часткові випадки топологічних просторів. Лінійні простори над полем дійсних чисел. Лінійні нормовані простори. – Означення метричного простору. Приклади. Відкриті множини метричного простору. – Метрична топологія. – Компактні множини метричного простору. – Лінійні простори над полем дійсних чисел. Приклади. – Підпростір лінійного простору. Алгебраїчна сума двох множин лінійного простору. Добуток числа на множину лінійного простору. – Лінійні нормовані простори. Задання метрики в лінійному нормованому просторі. – Неперервність операцій додавання двох елементів лінійного нормованого простору та множення числа на елемент цього простору	Лекція (4 год). Практичне заняття (2 год). Самостійна робота (5 год).	Розглянути поняття метричного простору; метричної топології; лінійного простору над полем дійсних чисел; підпростіру лінійного простору; лінійного нормованого простори. Питання для самостійного опрацювання: – Віддільні (гаусдорфові) топологічні простори; – Компакти. Компактні множини топологічних просторів.	Відповідь на практичних заняттях оцінюється по 12-бальній системі оцінювання.
Тема 3. Лінійні топологічні простори. – Лінійні топологічні простори (л.т.п.). Приклади. – Зсув відкритої множини л.т.п. на елемент цього простору, добуток відкритої множини л.т.п. на відмінне від нуля число. – Базиси околів нуля л.т.п. та довільної точки цього простору, зв'язок між ними.	Лекція (2 год). Практичне заняття (2 год). Самостійна робота (5 год).	Розглянути поняття лінійного топологічного простору, базису околів нуля л.т.п. та довільної точки цього простору, зв'язок між ними, поглинаючої та зрівноваженої множини л.т.п. Питання для самостійного опрацювання:	Відповідь на практичних заняттях оцінюється по 12-бальній системі оцінювання.

– Поглинаючі та зрівноважені множини л.т.п. – Базис околів нуля л.т.п. який складається з поглинаючих та зрівноважених околів. – Обмежені множини л.т.п. Критерій обмеженості множини. – Критерій віддільності л.т.п. –Замикання множини л.т.п.		– Обмежені множини л.т.п. Критерій обмеженості множини. – Критерій віддільності л.т.п.	
Тема 4. Опуклі множини лінійних просторів. Опуклі оболонки множини. Опуклі множини л.т.п. – Відрізок лінійного простору. – Поняття опуклої множини лінійного простору. Приклади опуклих множин. – Властивості опуклих множин лінійного простору. – Опукла комбінація точок лінійного простору. – Опукла оболонка множини лінійного простору. – Властивості опуклої оболонки множини. Теорема Каратеодорі. – Опуклі множини л.т.п. Властивості опуклих множин л.т.п.	Лекція (4 год). Практичне заняття (4 год). Самостійна робота (18 год).	Розглянути поняття опуклої множини лінійного простору, опуклої оболонки множини, опуклої множини л.т.п.: Питання для самостійного опрацювання: – Опукла комбінація точок лінійного простору. – Опукла оболонка множини лінійного простору. – Властивості опуклої оболонки множини. Теорема Каратеодорі.	Відповідь на практичних заняттях оцінюється по 12-бальній системі оцінювання.
Тема 5. Функціонали. Неперервні функціонали. Лінійні функціонали. – Функціонали. Неперервні функціонали. – Критерій неперервності функціонала. – Лінійні функціонали. Лінійні неперервні функціонали, задані на л.т.п. та деякі їх властивості. – Простір спряжений з л.т.п.	Лекція (4 год). Самостійна робота (5 год).	Розглянути поняття функціонала, лінійного функціоналу, лінійного неперервного функціоналу, заданого на л.т.п. та деякі їх властивості. Питання для самостійного опрацювання: – Простір, спряжений до лінійного топологічного простору. – Конуси з вершиною в точці 0 та деякі їх властивості.	
Тема 6. Теореми про віддільність двох опуклих множин л.т.п.	Лекція (2 год). Самостійна робота (17 год).	Розглянути поняття замкнених гіперплощин, відкритих та замкнених півпросторів лінійного топологічного простору, теорему Гана-Банаха в	

		геометричній формі в л.т.п., перша теорема віддільності двох опуклих множин л.т.п. Питання для самостійного опрацювання: – Поняття локально опуклого лінійного топологічного простору. – Друга теорема віддільності.	
Тема 7. Опуклі функції та їх властивості. – Поняття ефективною області та надграфіка функції, власної функції. – Опуклі функції та їх властивості. Приклади опуклих функцій. – Критерій опуклості власної функції. – Умова, за якої опукла функція дорівнює на внутрішності її ефективною області. – Властивості опуклих функцій.	Лекція (4 год). Практичне заняття (4 год). Самостійна робота (5 год).	Розглянути поняття ефективною області, надграфіка функції, власної функції; опуклої функції та їх властивості, критерій опуклості власної функції, властивості опуклих функцій. Питання для самостійного опрацювання: – Умова, за якої опукла функція дорівнює на внутрішності її ефективною області.	Відповідь на практичних заняттях оцінюється по 12-бальній системі оцінювання.
Тема 8. Неперервність опуклих функцій. Замкнені, півнеперервні знизу функції, зв'язок між ними та їх властивості. – Неперервність опуклих функцій. – Критерій неперервності власної опуклої функції в точці її ефективною області. – Умови, за яких опукла функція задовольняє умові Ліпшиця. – Замкнені, півнеперервні знизу функції, зв'язок між ними та їх властивості.	Лекція (4 год). Самостійна робота (5 год).	Розглянути поняття неперервності опуклої функції, критерій неперервності власної опуклої функції в точці її ефективною області. Питання для самостійного опрацювання: – Замкнені, півнеперервні знизу функції, зв'язок між ними та їх властивості.	
Тема 9. Замкненість, обмеженість, неперервність і ліпшецевість опуклих функцій: – Неперервність опуклих функцій. – Критерій неперервності власної опуклої функції в точці її ефективною області. – Умови, за яких опукла	Лекція (2 год).	Розглянути поняття: – Неперервність опуклих функцій. – Критерій неперервності власної опуклої функції в точці її ефективною області.	

функція задовольняє умові Ліпшиця. – Замкнені, півнеперервні знизу функції, зв'язок між ними та їх властивості.		– Умови, за яких опукла функція задовольняє умові Ліпшиця. – Замкнені, півнеперервні знизу функції, зв'язок між ними та їх властивості.	
Тема 10. Метрика Хаусдорфа. Відстань між множинами: – метрика Хаусдорфа між двома не порожніми обмеженими множинами; – Метричний простір не порожніх замкнених обмежених підмножин простору X.	Лекція (4 год). Практичне заняття (4 год).	Розглянути поняття: – метрика Хаусдорфа між двома не порожніми обмеженими множинами; – метричний простір $H(X)$ непорожніх замкнених обмежених підмножин простору X; – Підпростір $H_c(X)$ не порожніх компактів простору $H(X)$; – Властивості метричного просторів $H_c(X)$ та $H(X)$.	Відповідь на практичних заняттях оцінюється по 12-бальній системі оцінювання.
Тема 11. Багатозначні відображення. Напівнеперервні зверху та півнеперервні знизу багатозначні відображення: – Означення багатозначних відображень; – Півнеперервні зверху та півнеперервні знизу багатозначні відображення; – Неперервні багатозначні відображення.	Лекція (4 год). Практичне заняття (2 год).	Розглянути поняття: – означення багатозначних відображень; – півнеперервні зверху та півнеперервні знизу багатозначні відображення; – h-півнеперервні зверху та h-півнеперервні знизу багатозначні відображення; – властивості півнеперервних багатозначних відображень; – неперервні багатозначні відображення.	Відповідь на практичних заняттях оцінюється по 12-бальній системі оцінювання.
Тема 12. Вимірні багатозначні відображення. Вимірні селектори. Теорема Майкла і неперервні селектори: – вимірні багатозначні відображення; – теорема Майкла про існування неперервного селектору.	Лекція (4 год). Практичне заняття (4 год).	Розглянути поняття: – вимірні багатозначні відображення; – зв'язок між півнеперервністю багатозначного відображення та його вимірністю;	Відповідь на практичних заняттях оцінюється по 12-бальній системі оцінювання.

		– теорема про перетин вимірних багатозначних відображень; – теорема про існування вимірного селектору; – теорема Майкла про існування неперервного селектору.	
МКР 1	Практичне заняття (2 год). Самостійна робота (5 год).	Модульна контрольна робота містить 5 питань. Кожне питання максимально оцінюється у 6 балів.	Максимально можна отримати за написання МКР 30 балів. Модульну контрольну роботу, оцінену менше ніж на 18 балів, потрібно виконати повторно.
Разом за змістовим модулем 1	Лекції 40 / Практичні 26		

11. Система оцінювання та вимоги

Поточний контроль на практичних заняттях - 30 балів. Оцінювання на практичних заняттях відбувається за 12 бальною системою відповідно до критеріїв визначених Тимчасовим положенням про рейтингову систему оцінювання навчальних досягнень Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка (зі змінами та доповненнями).

Модульна контрольна робота – 30 балів.

Робота містить по 5 питань. За відповіді на питання бали нараховуються відповідно до таких критеріїв:

6 балів	Студент виявляє глибокі фундаментальні знання, повно викладає вивчений матеріал, розуміє можливість різних тлумачень однієї і тієї ж проблеми, вміє оцінювати аргументи для її доведення, формулює своє бачення проблеми, виявляє розуміння матеріалу, може обґрунтувати судження, застосувати знання на практиці у нестандартних ситуаціях, наводити необхідні приклади, викладає матеріал логічно, послідовно.
5 балів	Студент виявляє достатні знання теорії, повно викладає вивчений матеріал, виявляє розуміння предмета висловлення, але при цьому студент допускає 1-2 несуттєвих помилки або 1-2 недоліки в послідовності викладу матеріалу. Студент вміє наводити власні приклади на підтвердження нових думок, може застосувати вивчений матеріал у стандартних та дещо змінених ситуаціях.
4 бали	Студент виявляє достатні знання теорії, повно викладає вивчений матеріал, виявляє розуміння предмета висловлення, але при цьому студент допускає 1-2 несуттєвих помилки і 1-2 недоліки в послідовності викладу матеріалу. Студент вміє наводити власні приклади на підтвердження нових думок, може застосувати вивчений матеріал у стандартних та дещо змінених ситуаціях.
3 бали	Якщо студент виявляє знання і розуміння основних положень предмета, але викладає матеріал неповно: правильно формулює означення та теореми, але не

	спроможний їх доводити. Не вміє досить глибоко і доказово обґрунтовувати свої судження і наводити приклади.
2 бали	Якщо студент виявляє незнання більшої частини вивченого матеріалу. Допускає помилки у формулюванні понять, які спотворюють їх зміст, не вміє самостійно побудувати систему вивчення певних тем, хаотично і невпевнено викладає матеріал. Студент неспроможний виконати стандартні завдання навіть після навідних запитань викладача.
1 бал	Якщо студент виявляє повне незнання частини вивченого матеріалу.

Модульну контрольну роботу, оцінену менше ніж на 18 балів, потрібно виконати повторно.

РОЗПОДІЛ БАЛІВ ЗА ЗМІСТОВИМИ МОДУЛЯМИ :

Поточний і модульний контроль (100 балів)		Іспит	Разом
Змістовий модуль 1 (60 балів)			
Поточний контроль	МКР	40	100
30 балів	30 балів		

Питання семестрового іспиту

Топологічні простори. Означення топології. Означення топологічного простору. Приклади топологічних просторів. Відкриті множини топологічних просторів. Замкнені множини топологічних просторів. Перетин довільної кількості та об'єднання скінченної кількості замкнених множин топологічного простору. Околиці точок топологічного простору. Внутрішні точки та внутрішність множини топологічного простору. Точки дотикання, граничні точки, межові точки, замикання і межа множини топологічного простору.

Покриття множини топологічного простору. Відкрите покриття множини топологічного простору. Компакти, компактні множини топологічного простору. Прямий добуток двох (кількох) топологічних просторів.

Метричні простори як часткові випадки топологічних просторів. Означення метричного простору. Приклади. Відкриті кулі метричного простору. Відкриті множини метричного простору. Метрична топологія. Компактні множини метричного простору.

Лінійні простори над полем дійсних чисел. Приклади. Підпростір лінійного простору. Лінійні нормовані простори Неперервність операцій додавання двох елементів лінійного нормованого простору та множення числа на елемент цього простору.

Лінійні топологічні простори (л.т.п.). Приклади. Зсув відкритої множини л.т.п. на елемент цього простору, добуток відкритої множини л.т.п. на відмінне від нуля число. Базис околиць нуля л.т.п. та довільної точки цього простору, зв'язок між ними. Поглинаючі та зрівноважені множини л.т.п. Базис околиць нуля л.т.п., який складається з поглинаючих та зрівноважених околиць. Обмежені множини л.т.п., критерій обмеженості множини. Критерій віддільності л.т.п. Замикання множини л.т.п.

Поняття опуклої множини лінійного простору. Приклади опуклих множин. Властивості опуклих множин лінійного простору. Опукла комбінація точок лінійного простору. Опукла оболонка множини лінійного простору. Властивості опуклої оболонки множини. Опуклі множини л.т.п. Властивості опуклих множин л.т.п.

Функціонали. Неперервні функціонали. Лінійні неперервні функціонали, задані на л.т.п., та деякі їх властивості. Простір, спряжений з л.т.п.

Опуклі функції та їх властивості. Приклади опуклих функцій. Критерій опуклості власної функції. Властивості опуклих функцій.

Неперервність опуклих функцій. Критерій неперервності власної опуклої функції в точці її ефективної області. Умови, за яких опукла функція задовільняє умові Ліпшиця. Замкнені, півнеперервні знизу функції, зв'язок між ними та їх властивості. Замкненість, обмеженість, неперервність і ліпшецевість опуклих функцій.

Метрика Хаусдорфа. Відстань між множинами.

Багатозначні відображення. Напвнеперервні зверху та півнеперервні знизу багатозначні відображення.

Вимірні багатозначні відображення. Вимірні селектори.

Теорема Майкла і неперервні селектори.

ОСНОВНА

1. Моклячук М.П. Основи опуклого аналізу. Навчальний посібник / М.П. Моклячук. – К.: Видавництво ТВіМС, 2004. – 240 с.

2. Половинкин Е.С. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа / Е.С. Половинкин, М.В. Балашов. – М.: Физматлит, 2004. – 416 с.

3. Стрекаловский А.С. Введение в выпуклый анализ: учебное пособие / А.С. Стрекаловский. – Иркутск: Иркутский университет, 2009. – 81с.

4. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, В. В. Обухов ский, А. Д. Мышкис. — М. : КомКнига (УРСС), 2005. — 214 с.

5. Аругтюнов А. В. Лекции по выпуклому и многозначному анализу/ А. В. Аругтюнов — М.: ФЗМАТЛИТ, 2014. — 184 с.

ДОПОМІЖНА

6. Экланд И. Выпуклый анализ и вариационные проблемы / И. Экланд, Р. Тетам. – М.: Мир, 1979. – 399 с.

7. Кадец В.М. Курс функционального анализа: учебное пособие для студентов механико-математического факультета / В.М. Кадец. – Х.: ХНУ имени В.Н. Каразина, 2006. – 607 с.

8. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1989. – 623 с.

9. Лейхтвейс К. Выпуклые множества / К. Лейхтвейс. – М.: Наука, 1985. – 335 с.

10. Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Высшая школа, 1982. – 272 с.