

**Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка**  
**Фізико-математичний факультет**  
**Кафедра математики**

**Силабус навчальної дисципліни**  
**«ОПУКЛИЙ АНАЛІЗ»**

|   |  |                |
|---|--|----------------|
| <b>Рівень вищої освіти</b>  | Перший (бакалаврський) рівень вищої освіти   |                |
| <b>Спеціальність</b>  | 014 Середня освіта (Математика)  |                |
| <b>Освітньо-професійна програма (ОПП)</b>                                       | Середня освіта (Математика, інформатика)   |                |
| <b>Статус дисципліни</b>  | Вибіркова  |                |
| <b>Курс та семестр, на якому викладається дисципліна.</b>                       | 3 курс;<br>6 семестр   |                |
| <b>Обсяг дисципліни, семестровий контроль</b>                                   | Кількість кредитів ЄКТС  | 7 кредити ЄКТС |
|   | Загальний обсяг годин  | 210 год.       |
|   | Кількість годин навчальних занять  | 70 год.        |
|   | Лекційні заняття   | 40 год.        |
|   | Практичні заняття  | 30 год.        |
|   | Семінарські заняття  | 0 год.         |
|   | Лабораторні заняття  | 0 год.         |
|   | Самостійна та індивідуальна робота   | 140            |
| Форма підсумкового контролю   | екзамен  |                |
| <b>Інформація про викладача, що проводить лекційні заняття.</b>                 | Гудима Уляна Василівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики<br>E-mail: <a href="mailto:ulag2107@gmail.com">ulag2107@gmail.com</a>   |                |
| <b>Інформація про викладача, що проводить практичні та лабораторні заняття.</b> | Гудима Уляна Василівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики<br>E-mail: <a href="mailto:ulag2107@gmail.com">ulag2107@gmail.com</a>   |                |
| <b>Мова навчання</b>  | Українська   |                |
| <b>Сторінка курсу в MOODLE</b>  | <a href="https://moodle.kpnu.edu.ua/course/view.php?id=7823">https://moodle.kpnu.edu.ua/course/view.php?id=7823</a>  |                |
| <b>Анотація до курсу</b>  | Дисципліна «Опуклий аналіз» належить до навчальних дисциплін, які забезпечують професійний розвиток студентів та спрямовані на більш повне, глибоке та детальне засвоєння деяких розділів математики. Зокрема, навчальна дисципліна передбачає вивчення основних понять, тверджень, теорем, що стосуються властивостей опуклих множин та опуклих функцій, субдиференціального числення опуклих функцій та їх застосування при дослідженні задачі опуклого програмування. |                |
| <b>Мета навчальної дисципліни</b>   | Оволодіння студентами загальними властивостями лінійних і лінійних топологічних просторів, теорією опуклих множин цих просторів та опуклих функцій, заданих на них, теорією двоїстості опуклих функцій та їх субдиференціальним численням  |                |
| <b>Пререквізити курсу</b>   | Передумовами для вивчення дисципліни є вивчення математичного аналізу, лінійної алгебри, дискретної математики, функціонального аналізу.   |                |
| <b>Технічне й програмне забезпечення</b>  | Аудиторія теоретичного навчання  |                |
| <b>Компетентності, формуванню яких</b>  | – Здатність формувати в учнів предметні компетентності.<br>– Здатність використовувати системні знання з математики, інформатики, педагогіки, методики навчання математики та  |                |

|   |   |
|---|---|
| <p><b>сприяє дисципліна.</b></p>          | <p>інформатики, історії їх виникнення та розвитку.<br/>         – Здатність ефективно застосувати ґрунтовні знання змісту шкільної математики та інформатики.<br/>         – Здатність аналізувати математичну задачу, розглядати різні способи її розв’язування.<br/>         – Здатність формувати в учнів переконання в необхідності обґрунтування гіпотез, розуміння математичного доведення.<br/>         – Здатність оперувати загальними властивостями лінійних і лінійних топологічних просторів, теорією опуклих множин цих просторів та опуклих функцій, заданих на них, теорією двоїстості опуклих функцій та їх субдиференціальним численням.</p>   |
| <p><b>Результати навчання</b></p>         | <p>– Демонструвати знання й розуміння основних концепцій, принципів, теорій фундаментальної математики і використовувати їх на практиці.<br/>         – Володіти основними поняттями та теоретичними основами класичних розділів математичної науки, базовими ідеями та методами математики, системою основних математичних структур і аксіоматичним методом, аналізувати елементарну математику з точки зору вищої математики.<br/>         – Демонструвати культуру математичного мислення, логічну та алгоритмічну культуру.<br/>         – Уміти розв’язувати задачі різних рівнів складності шкільного курсу математики.<br/>         – Виявляти здатність до самонавчання та продовження професійного розвитку.<br/>         – Уміти організувати власну діяльність та одержувати результат у рамках обмеженого часу.<br/>         – Досліджувати функції, задані на лінійних та лінійних топологічних просторах на опуклість, знаходити функції, спряжені до них.<br/>         – Знаходити субградієнти та субдиференціали опуклих функцій, похідні цих функцій за напрямком з допомогою зв’язку між похідною функції за напрямком та їх субдиференціалом у відповідній точці.<br/>         – Використовувати необхідні та достатні умови оптимального розв’язку задачі опуклого програмування для відшукування цього розв’язку.</p> |
| <p><b>Зміст навчальної дисципліни</b></p> | <p><b>Змістовий модуль 1. Необхідні відомості з функціонального аналізу. Опуклі множини</b><br/> <b>Тема 1. Топологічні простори.</b><br/>         Топологічні простори.<br/>         Відкриті та замкнені множини топологічного простору.<br/>         Критерій відкритої множини топологічного простору.<br/> <b>Тема 2. Метричні простори як часткові випадки топологічних просторів. Лінійні простори над полем дійсних чисел. Лінійні нормовані простори.</b><br/>         Означення метричного простору. Приклади. Відкриті множини метричного простору.<br/>         Метрична топологія. Компактні множини метричного простору.<br/>         Лінійні простори над полем дійсних чисел. Приклади. Підпростір лінійного простору. Алгебраїчна сума двох множин лінійного простору. Добуток числа на множину лінійного простору.<br/>         Лінійні нормовані простори. Задання метрики в лінійному нормованому просторі.<br/>         Неперервність операцій додавання двох елементів лінійного нормованого простору та множення числа на елемент цього простору<br/> <b>Тема 3. Лінійні топологічні простори.</b><br/>         Лінійні топологічні простори (л.т.п.). Приклади.<br/>         Зсув відкритої множини л.т.п. на елемент цього простору, добуток відкритої множини л.т.п. на відмінне від нуля число.</p>              |

Базиси околів нуля л.т.п. та довільної точки цього простору, зв'язок між ними.

Поглинаючі та зрівноважені множини л.т.п.

Базис околів нуля л.т.п. який складається з поглинаючих та зрівноважених околів.

Обмежені множини л.т.п. Критерій обмеженості множини. Критерій віддільності л.т.п.

Замикання множини л.т.п.

**Тема 4. Опуклі множини лінійних просторів. Опуклі оболонки множини. Опуклі множини л.т.п.**

Відрізок лінійного простору.

Поняття опуклої множини лінійного простору. Приклади опуклих множин. Властивості опуклих множин лінійного простору.

Опукла комбінація точок лінійного простору. Опукла оболонка множини лінійного простору.

Властивості опуклої оболонки множини. Теорема Каратеодорі.

Опуклі множини л.т.п. Властивості опуклих множин л.т.п.

**Тема 5. Функціонали. Неперервні функціонали. Лінійні функціонали.**

Функціонали. Неперервні функціонали. Критерій неперервності функціонала.

Лінійні функціонали. Лінійні неперервні функціонали, задані на л.т.п. та деякі їх властивості. Простір спряжений з л.т.п.

**Тема 6. Теореми про віддільність двох опуклих множин л.т.п.**

Теорема Гана-Банаха в геометричній формі в л.т.п.

Перша теорема віддільності двох опуклих множин л.т.п.

Поняття локально опуклого лінійного топологічного простору.

Друга теорема віддільності.

**Змістовий модуль 2. Опуклі функції, їх спряжені функції**

**Тема 1. Опуклі функції та їх властивості.**

Поняття ефективної області та надграфіка функції, власної функції.

Опуклі функції та їх властивості. Приклади опуклих функцій.

Критерій опуклості власної функції. Умова, за якої опукла функція дорівнює на внутрішності її ефективної області.

Властивості опуклих функцій.

Нерівність Іенсена.

**Тема 2. Неперервність опуклих функцій. Замкнені, півнеперервні знизу функції, зв'язок між ними та їх властивості.**

Неперервність опуклих функцій.

Критерій неперервності власної опуклої функції в точці її ефективної області.

Умови, за яких опукла функція задовольняє умові Ліпшиця.

Замкнені, півнеперервні знизу функції, зв'язок між ними та їх властивості.

**Тема 3. Спряжені функції (поляри).**

Поняття спряженої функції (поляри).

Властивості спряженої функції. Друга спряжена функція (біполяра) та її властивості.

Критерій опуклості та замкненості

**Тема 4. Сублінійні функції. Похідна функції в точці за напрямком та її властивості.**

Поняття сублінійної функції.

Критерій опуклості власної додадно однорідної функції.

Властивості додатно однорідних та сублінійних функцій.

Зв'язок між сублінійною функцією та опорною функцією ефективної області, її поляри. Теорема двоїстості для сублінійних функцій.

Похідна функції в точці за напрямком та її властивості.

Існування та сублінійність похідної за напрямком власної опуклої

|  |   |
|--|---|
|  | <p>функції в точках її ефективної області.</p> <p><b>Тема 5. Субградієнт та субдиференціал функції в точці. Приклади обчислення субдиференціалів.</b></p> <p>Субградієнт та субдиференціал функції в точці. Властивості субдиференціала. Різні означення субдиференціала та їх еквівалентність.</p> <p>Критерій точки глобального мінімуму опуклої власної функції. Зв'язок між субдиференціалом і похідною за Гато диференційової за Гато функції.</p> <p>Приклади обчислення субдиференціалів.</p> <p><b>Тема 6. Постановка задачі опуклого програмування. Теорема Куна-Таккера.</b></p> <p><b>Тема 7. Теорема Дубовицького-Мілютіна про субдиференціал максимуму кількох функцій.</b></p> <p>Основні теореми про субдиференціали.</p> <p>Теорема Моро-Рокафеллара про субдиференціал суми кількох опуклих функцій.</p> <p>Теорема Дубовицького-Мілютіна про субдиференціал максимуму кількох опуклих функцій.</p>  |
| <p><b>Політика курсу</b></p>               | <p>Для здобувачів вищої освіти відвідування занять є обов'язковим. Поважними причинами для неявки на заняття є хвороба або академічна мобільність, які необхідно підтверджувати документами. Відсутність здобувача на заняттях передбачає самостійне опрацювання матеріалу та не звільняє здобувача від виконання завдання самостійної підготовки або завдання поточного та підсумкового контролю.</p> <p>Студент повинен відпрацювати або перездати певний вид роботи у випадках:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– студент пропустив лекційне заняття (у цьому випадку студент зобов'язаний самостійно оволодіти пропущеним матеріалом та відповідати на питання в межах вивченого теоретичного матеріалу);</li> <li>– студент пропустив практичне заняття (у цьому випадку студент зобов'язаний самостійно оволодіти пропущеним матеріалом та уміти застосовувати його на практиці; відпрацьоване заняття оцінюється);</li> <li>– якщо під час практичних занять студент отримав незадовільну оцінку (у цьому випадку студент зобов'язаний сумлінно оволодіти матеріалом та вміннями застосовувати його на практиці; відпрацьоване заняття оцінюється).</li> </ul> <p>При умові відсутності заборгованостей та написанні модульних контрольних робіт на позитивну оцінку, студент допускається до екзамену.</p> <p>Самостійна робота включає теоретичне вивчення питань та відпрацювання практичних навичок передбачених програмним матеріалом, що стосуються тем навчальної дисципліни, які не ввійшли в лекційний курс, або були розглянуті коротко, їх поглиблене вивчення за рекомендованою літературою, а також виконання завдань з метою закріплення теоретичного матеріалу.</p> <p>Обов'язково дотримуватись норм етичної поведінки та академічної доброчесності, передбачених «Кодексом академічної доброчесності Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка».</p> |
| <p><b>Система оцінювання та вимоги</b></p> | <p>Оцінювання здобувачів вищої освіти здійснюється згідно «Положення про рейтингову систему оцінювання навчальних досягнень здобувачів вищої освіти Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка».</p> <p>Максимальний бал оцінки поточної успішності здобувачів вищої освіти на навчальних заняттях рівний 12.</p> <p>Здобувач вищої освіти, знання, уміння і навички якого на навчальних заняттях оцінено від 1 до 3 балів, вважається таким,</p>  |

що недостатньо підготувався до цих занять і має академічну заборгованість за результатами поточного контролю.

Обрахунок результатів навчальної діяльності та рейтингова оцінка у балах знань, умінь і навичок на навчальних заняттях з навчального (змістового) модуля обчислюється за такою формулою:

$$r = (0,05 * \bar{r} + 0,4) * r_{\max}$$

де  $\bar{r}$  – середня оцінка навчальної діяльності на навчальних заняттях;

$r_{\max}$  – встановлений максимально можливий бал на оцінювання результатів навчальної діяльності на навчальних заняттях з навчального (змістового) модуля.

#### Модульні контрольні роботи № 1, 2 – по 18 балів.

Кожна робота містить по 3 питання. За відповіді на питання бали нараховуються відповідно до таких критеріїв:

|                 |  |
|-----------------|--|
| <b>6 балів</b>  | Студент виявляє глибокі фундаментальні знання, повно викладає вивчений матеріал, розуміє можливість різних тлумачень однієї і тієї ж проблеми, вміє оцінювати аргументи для її доведення, формулює своє бачення проблеми, виявляє розуміння матеріалу, може обґрунтувати судження, застосувати знання на практиці у нестандартних ситуаціях, наводити необхідні приклади, викладає матеріал логічно, послідовно. |
| <b>4-5 бали</b> | Студент виявляє достатні знання теорії, повно викладає вивчений матеріал, виявляє розуміння предмета висловлення, але при цьому студент допускає 1-2 несуттєвих помилки або 1-2 недоліки в послідовності викладу матеріалу. Студент вміє наводити власні приклади на підтвердження нових думок, може застосувати вивчений матеріал у стандартних та дещо змінених ситуаціях.                                     |
| <b>3 бали</b>   | Якщо студент виявляє знання і розуміння основних положень предмета, але викладає матеріал неповно: правильно формулює означення та теореми, але не спроможний їх доводити.<br>Не вміє досить глибоко і доказово обґрунтувати свої судження і наводити приклади.  |
| <b>2 бали</b>   | Якщо студент виявляє незнання більшої частини вивченого матеріалу. Допускає помилки у формулюванні понять, які спотворюють їх зміст, не вміє самостійно побудувати систему вивчення певних тем, хаотично і невпевнено викладає матеріал. Студент неспроможний виконати стандартні завдання навіть після навідних запитань викладача.   |
| <b>1 бал</b>    | Якщо студент виявляє повне незнання частини вивченого матеріалу.   |

Модульну контрольну роботу, оцінену менше ніж на 11 балів, потрібно виконати повторно.

#### РОЗПОДІЛ БАЛІВ ЗА ЗМІСТОВИМИ МОДУЛЯМИ:

| Поточний і модульний контроль (100 балів) |          |                               |          | Екзамен  | Сума      |
|---|----------|-------------------------------|----------|----------|-----------|
| Змістовий модуль 1 (30 балів)             |          | Змістовий модуль 2 (30 балів) |          |          |           |
| Поточний контроль                         | МКР      | Поточний контроль             | МКР      | 40 балів | 100 балів |
| 12 балів                                  | 18 балів | 12 балів                      | 18 балів |          |           |

Рекомендована література

#### ОСНОВНА

1. Гудима У.В., Гнатюк В.О. Опуклий аналіз. Навчальний

посібник. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. 112 с. 111.

2. Моклячук М.П. Основи опуклого аналізу. Навчальний посібник. К.: Видавництво ТВіМС, 2004. – 240 с.

3. Моклячук М.П. Негладкий аналіз та оптимізація: навчальний посібник. К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2008. 399 с.

4. Моклячук М.П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. Підручник. К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2009. 380 с.

#### **ДОПОМІЖНА**

1. Жалдак М.І., Триус Ю.В. Основи теорії і методів оптимізації: навчальний посібник. Черкаси: Брама-Україна, 2005. 608 с.

2. Zălinescu, Constantin (30 July 2002). *Convex Analysis in General Vector Spaces*. River Edge, N.J. London: World Scientific Publishing.

3. Ус С.А. Функціональний аналіз: навчальний посібник. Дніпропетровськ: Національний гірничий університет, 2013. 236 с.