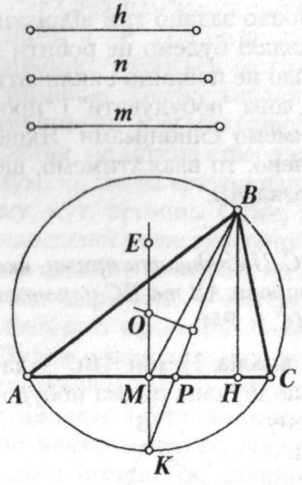
бісектрисі кута BAC. Аналогічно доводиться, що відрізок CK належить бісектрисі кута BCA. Таким чином, точка K є точкою перетину цих двох бісектрис. Це дозволяє виконати **ланцюжок побудов**:

1) будуємо бісектриси кутів BAC і BCA;
2) будуємо точку K перетину цих бісектрис;
3) через точку K проводимо пряму, паралельну до прямої AC.

Побудована пряма — шукана. **Доведемо це твердження**. Оскільки побудована пряма та пряма AC паралельні за побудовою і пари кутів PAK та KAC, MCK та ACK відповідно рівні (теж за побудовою), то трикутники APK і KMC — рівнобедрені. Звідси одразу випливає рівність $AP + MC = PM$, що завершує доведення. **Дослідження** слід пов'язувати з ланцюжком проведених побудов. Усі вони завжди виконуються, причому однозначно. Висновок: задача завжди має єдиний розв'язок. ■

Приклад 2. *Побудувати трикутник ABC, якщо задано його висоту, бісектрису і медіану, які проведено з вершини B.*



Мал. 2

Розв'язання. Проведемо спочатку **аналіз**. Припустимо, що трикутник ABC — шуканий і у ньому BH — висота, BM — медіана. Опишемо навколо цього трикутника коло, центр якого позначимо через O (*мал. 2*). Очевидно, що пряма OM перпендикулярна до прямої AC.

Точку перетину прямої OM з побудованим колом позначимо через K. Оскільки точка K ділить дугу AKC навпіл, то відрізок BK містить у собі бісектрису BP кута ABC. Оскільки точки B і K належать колу, то його центр лежить на серединному перпендикулярі, встановленому до відрізка BK. Проведені міркування дозволяють виконати наступні **побудови**:

1) будуємо прямокутний трикутник BHM за катетом (даною висотою h) і гіпотенузою (даною медіаною m);
2) будуємо пряму ME, паралельну до прямої BH;
3) будуємо точку P, оскільки відрізок BP (бісектриса n кута ABC) заданий;
4) будуємо точку K перетину прямих BP і ME;

5) будуємо серединний перпендикуляр до відрізка BK і точку O перетину його з прямою MK;
6) будуємо коло з центром у точці O, радіус якого дорівнює відрізку OB, і точки A та C перетину останнього кола з прямою AC. Трикутник ABC — шуканий.

Доведення. Прямі BH і AC перпендикулярні, відрізки $BH = h$, $BM = m$ (все це за побудовою). Точка M є серединою відрізка AC, оскільки вона є основою перпендикуляра, опущеного з точки O (центр кола) на хорду AC. Кути ABP і PBC рівні, оскільки точка K є серединою дуги AKC.

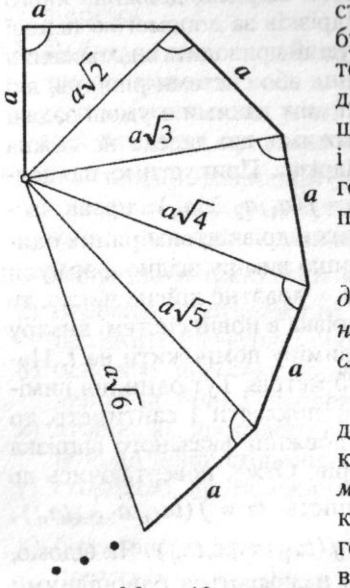
Дослідження. Трикутник MBH будується, якщо $m > h$. Легко бачити, що при умові $h < n < m$, усі проведені побудови однозначно виконуються, тобто задача має єдиний розв'язок. Якщо $h = n = m$, то шуканий трикутник рівнобедрений, і задача має безліч розв'язків. При всіх інших співвідношеннях між даними елементами задача розв'язку не має. ■

Нижче ми наводимо умови задач, що входять до шкільних підручників з геометрії, розв'язування яких не вимагає застосування спеціальних методів, про які буде йти мова у цьому посібнику. Радимо читачеві оцінити свої можливості, розв'язавши запропоновані нижче задачі. Це становитиме перший крок до успішного засвоєння подальшого матеріалу.

Задачі підготовчого рівня

1. Побудувати коло даного радіуса, що проходить через дві дані точки.
2. Побудувати коло, яке вписане в даний трикутник.
3. Побудувати коло, яке описане навколо даного трикутника.
4. Вписати в дане коло правильний дванадцятикутник.
5. Описати навколо даного кола правильний трикутник (правильний восьмикутник).
6. Через дану точку провести дотичні до даного кола. Побудувати спільні дотичні до двох даних кіл.
7. Поділити даний кут на чотири рівні частини. Побудувати кути градусною мірою 30, 45 та 60 градусів. Побудувати кут, косинус якого дорівнює 0,8.
8. Поділити даний відрізок на п'ять рівних частин.
9. На даній прямій побудувати точку, сума відстаней від якої до двох даних точок є найменшою.

за допомогою циркуля і лінійки побудувати його неможливо; рівністю б) довжина відрізка взагалі не визначається; рівністю в) визначається довжина відрізка, який можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки. Але не все так просто. Теорема 1 стверджує лише про можливість побудови відрізка і ніяких рецептів щодо техніки його побудови не дає. До задач такого типу, що розв'язуються в шкільному курсі геометрії, належить і задача 14 з п.1.1 (задачі підготовчого рівня). Розглянемо спочатку два прості приклади.



Мал. 10

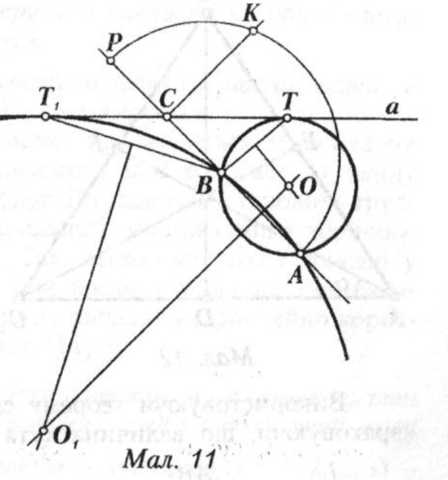
***Приклад 1.** Побудувати відрізок довжиною $a\sqrt{n}$, де a — довжина даного відрізка, $n > 1$ — натуральне число.*

Розв'язування цієї задачі зводиться до побудови $n-1$-го прямокутного трикутника, як це вказано на *малюнку 10* (дугою позначено прямі кути), і використання теореми Піфагора. Звичайно, не обов'язково будувати всі вказані на цьому малюнку трикутники. В залежності від числа n кількість їх можна зменшити. ■

***Приклад 2.** Побудувати коло, що проходить через дві дані точки і дотикається до даної прямої.*

Розв'язання. З усіх можливих варіантів взаємного розміщення даних фігур розглянемо лише один: задані точки A і B лежать по один бік від даної прямої a, причому прямі AB і a перетинаються в точці C і не є перпендикулярними (усі інші випадки значно простіші, і читач сам може їх розглянути). Нехай шукане коло дотикається до даної прямої в точці T і точка B лежить між точками A і C. Отже, з точки C до шуканого кола проведено січну CA і дотичну CT. Як добре відомо з шкільного курсу планіметрії, справджується рівність $CT^2 = AC \times BC$, звідки $CT = \sqrt{AC \times BC}$. Відрізок CT можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки. Звідси випливає ланцюжок побудов (*мал. 11*): 1) будуємо відрізок CK, що дорівнює відрізку CT (ця побудова відома з шкільного курсу планіметрії: на прямій AC будуємо відрізок PC, що дорівнює відрізку CB, будуємо коло з

діаметром AP, будуємо точку K, яка одержується від перетину цього кола з перпендикуляром, проведеним до прямої AC через точку C); 2) будуємо коло $S(C, CK)$, від перетину якого з прямою a одержується точка T; 3) описуємо коло навколо трикутника ABT, яке і є шуканою фігурою. Нагадаємо, що центр O кола, описаного навколо трикутника, співпадає з точкою перетину серединних перпендикулярів, проведених до його сторін. Оскільки коло $S(C, CK)$ перетинає пряму a в двох точках, то у зазначеному вище варіанті розташування даних фігур задача завжди має два розв'язки. ■



Мал. 11

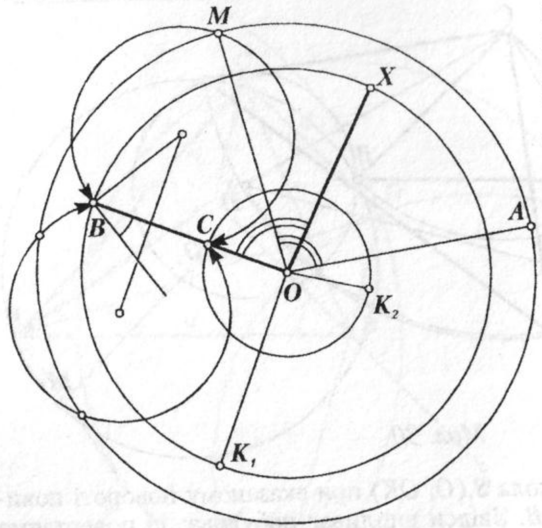
Приклад 3.** На даному відрізку AB побудувати таку точку X, щоб справджувалась рівність $\dfrac{AB}{AX} = \dfrac{AX}{BX}$ **(золотий переріз відрізка AB).

Розв'язання. Позначимо довжини відрізків AB і AX через a та x відповідно. Тоді рівність з умови задачі набирає вигляду $\dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{a-x}$, звідки одержується квадратне рівняння $x^2 + ax - a^2 = 0$. Воно має єдиний додатний корінь $x = \dfrac{-a + a\sqrt{5}}{2}$. Враховуючи приклад 1, відрізок довжиною x легко побудувати, після чого будується шукана точка X. Пропонуємо читачеві ці побудови провести самостійно. ■

Розглянемо тепер більш складну важливу задачу.

***Приклад 4.** Побудувати трикутник за трьома його бісектрисами.*

Розв'язання. За умовою задачі дано три відрізки, що дорівнюють бісектрисам внутрішніх кутів трикутника, який треба побудувати.



Мал. 31

цьому разі шуканий кут повороту навколо точки O за годинниковою стрілкою дорівнює куту MOA. Повернемо на цей кут відрізок BO за годинниковою стрілкою навколо точки O і одержимо шуканий радіус OX. Задача має стільки розв'язків, скільки спільних точок мають побудоване ГМТ і коло $S_3(O, OA)$, тобто, або жодного розв'язку, або два розв'язки, або чотири розв'язки. У розглянутому нами випадку таких розв'язків існує чотири. ■

Зауважимо, що частковим випадком повороту є центральна симетрія. Дійсно, для побудови точки, симетричної з даною точкою відносно заданого центру симетрії, досить повернути дану точку навколо цього центру на кут, величина якого дорівнює 180°. Проте при розв'язуванні конкретних задач буває зручним безпосереднє застосування саме центральної симетрії.

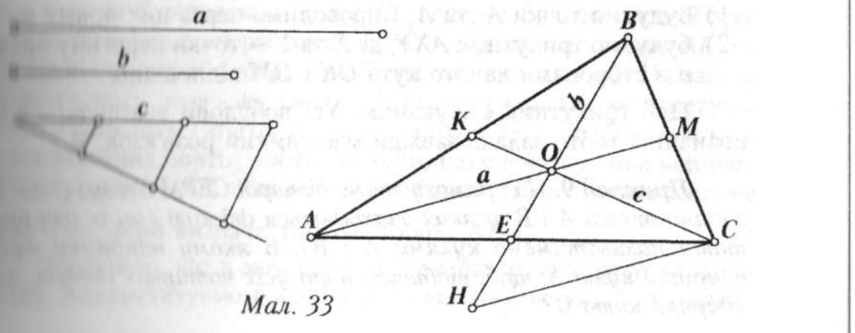
Приклад 6. *Через дану точку A провести відрізок так, щоб його кінці належали до двох даних кіл, а точка A ділила його навпіл.*

Розв'язання. Нехай кола $S_1(O, OK_1)$ та $S_2(H, HK_2)$ є заданими фігурами. Якщо BC – шуканий відрізок, то точки B і C належать колам $S_1(O, OK_1)$ і $S_2(H, HK_2)$ відповідно, причому ці точки симетричні відносно даної точки A. Тоді коло S_3, симетричне до кола $S_1(O, OK_1)$, повинне містити точку C, отже, воно перетинає дане коло $S_2(H, HK_2)$ саме у цій точці. Звідси випливає **побудова:** 1) будуємо точку O_1 симетричну з точкою O відносно точки A; 2) будуємо коло $S_3(O_1, OK_1)$. Спільна точка цього кола і кола $S_2(H, HK_2)$ є одним з кінців шуканого відрізка (*мал. 32*). Задача має стільки розв'язків, скільки спільних точок мають кола S_2 та S_3. ■

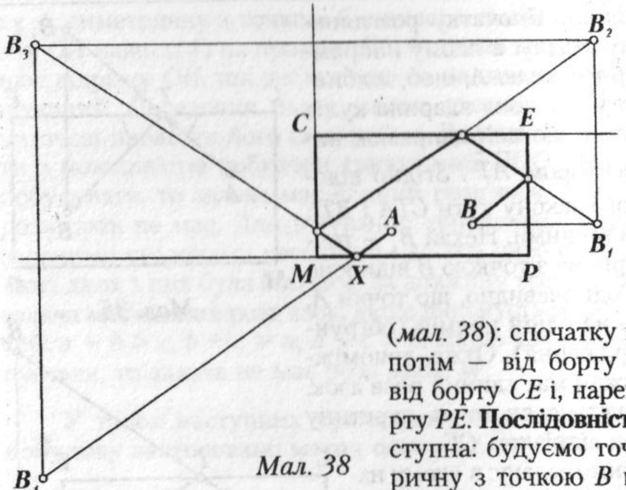
Мал. 32

Приклад 7. *Побудувати трикутник за трьома даними його медіанами.*

Розв'язання. Нехай задано три відрізки з довжинами a, b і c. Припустимо, що шуканий трикутник ABC побудований, і відрізки AM, BE і CK є його медіанами, тобто, $AM = a$, $BE = b$ і $CK = c$ (накресліть самостійно малюнок для аналізу). Як відомо з шкільного курсу геометрії, усі медіани трикутника мають спільну точку O, яка ділить кожну з них на два відрізки, причому справджуються рівності: $\frac{AO}{OM} = \frac{BO}{OE} = \frac{CO}{OK} = \frac{2}{1}$. Нехай H – точка, що симетрична з точкою O відносно точки E. Легко довести, що виконуються рівності: $HC = OA = \frac{2}{3}a$, $OH = OB = \frac{2}{3}b$, $OC = \frac{2}{3}c$ (доведіть це самостійно). Звідси випливає, що трикутник HOC можна побудувати за трьома сторонами, після чого шуканий трикутник легко будується. **Побудову** виконаємо на *малюнку 33*: 1) будуємо відрізки AO, BO і CO, поділивши кожний заданий відрізок на три рівні частини, користуючись теоремою Фалеса; 2) будуємо трикутник HOC за трьома сторонами, що відповідно рівні цим побудованим відрізкам; 3) будуємо точ-



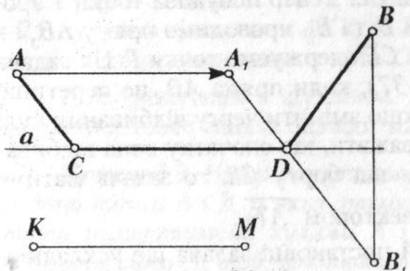
Мал. 33



Мал. 38

(*мал. 38*): спочатку від борту MP, потім — від борту MC, потім — від борту CE і, нарешті, — від борту PE. **Послідовність побудов** наступна: будуємо точку B_1, симетричну з точкою B відносно прямої PE, потім будуємо точку B_2, симетричну з точкою B_1 відносно прямої CE, далі будуємо точку B_3, симетричну з точкою B_2 відносно прямої MC і, нарешті, будуємо точку B_4, симетричну з точкою B_3 відносно прямої MP. Через X позначимо точку перетину прямої AB_4 з відрізком MP. Якщо ця точка не є кінцем відрізка MP, то вектор $\overrightarrow{AX}$ визначає потрібний напрямок удару. Якщо ж пряма AB_4 з відрізком MP не перетинаються або точка їх перетину співпадає з кінцем цього відрізка, то слід змінити послідовність відбивань кулі від бортів. Попробуйте встановити самостійно, чи завжди існує така послідовність відбивань кулі від бортів, при якій поставлена задача має розв'язок. ■

Приклад 10. *Задано точки A і B, що лежать по один бік від даної прямої a, і відрізок KM. Побудувати на цій прямій точки C і D так, щоб відрізки CD і KM були рівними і ламана $ACDB$ мала найменшу довжину.*



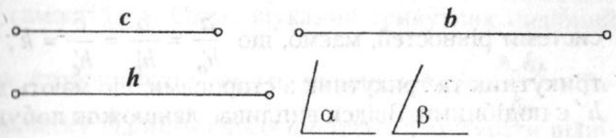
Мал. 39

Розв'язання. Припустимо, що точки C і D побудовано (*мал. 39*), тобто $CD = KM$ і вказана ламана має найменшу довжину. Здійснимо паралельне перенесення точки A на вектор $\overrightarrow{CD}$ і одержимо точку A_1. Довжина ламаної $ACDB$ дорівнює $CD + A_1D + BD$ і залежить від суми двох останніх доданків, оскільки довжина відрізка CD задана. Будуємо точку B_1, симетричну з точкою B відносно прямої a. Тоді $A_1D + BD = A_1D + B_1D$, а остання сума є мінімальною, коли точки A_1, D і B_1 лежать на одній прямій. Звідси одразу випливає наступна побудова: 1) будуємо точки A_1 і B_1, як вказано вище; 2) будуємо спільну точку прямих A_1B_1 та a, яка і є шуканою точкою D. Побудова точки C очевидна. Задача має єдиний розв'язок. ■

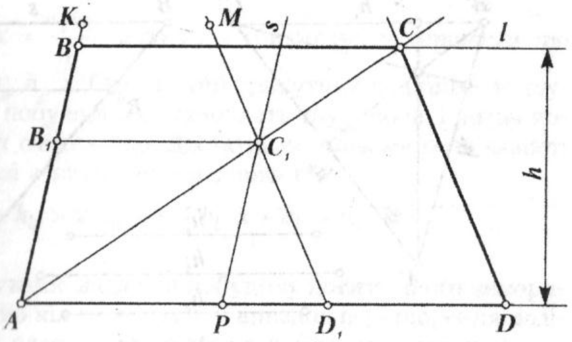
Застосування методу подібності до розв'язування задач на побудову часто полягає в тому, що спочатку будується не шукана фігура, а фігура, що подібна до неї. Розглянемо задачу такого типу.

Приклад 11. *Побудувати трапецію $ABCD$ за кутами при її основі AD, висотою, що проведена до цієї основи, та відношенням $\dfrac{m}{n}$ $(m > n)$ її основ $\dfrac{AD}{BC}$, де m та n — довжини даних відрізків.*

Розв'язання. Задані кути позначимо через α і β, задану висоту — через h, відрізки з довжинами m і n — через b та c відповідно. **Побудуємо спочатку трапецію $AB_1C_1D_1$** за основами b і c та заданими кутами при основі b (*мал. 40*). Для цього будуємо відрізок b з кінцевими точками A, D_1 і кути KAD_1 та MD_1A з вершинами у цих точках, що дорівнюють кутам α і β відповідно. На відрізку AD_1 будуємо відрізок AP, що дорівнює відрізку c. Через точку P проводимо пряму s, що паралельна до прямої AK, і одержуємо точку C_1 як точку перетину прямих s і D_1M. Побудова точки B_1 очевидна.



Існує дві прямі, кожна точка яких віддалена від прямої AD_1 на відстань, що дорівнює довжині даного відрізка h. Будуємо ту з них, яка пе-



Мал. 40

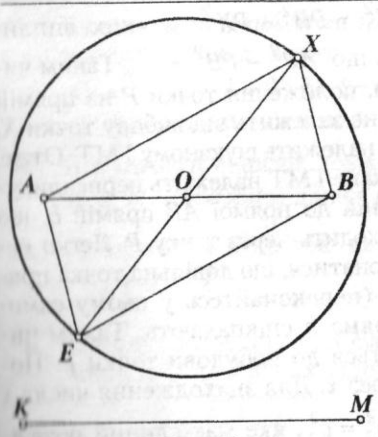
Тепер розглянемо приклади застосування алгебраїчного методу до побудови ГМТ.

Приклад 6. *Побудувати ГМТ, сума квадратів відстаней від кожної з яких до двох даних точок A і B є стале число, що дорівнює квадрату довжини даного відрізка KM.*

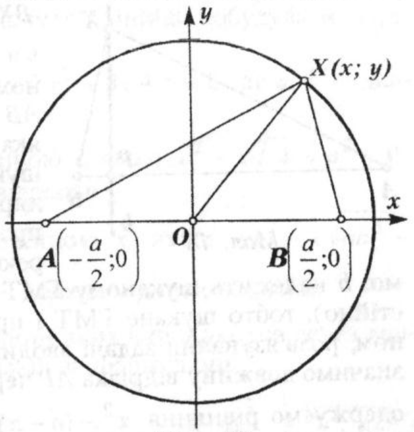
Розв'язання. Довжини відрізків AB та KM позначимо через a та c відповідно. Нехай точка X належить шуканому ГМТ. Це означає, що $AX^2 + BX^2 = c^2$. Доповнимо трикутник AXB до паралелограма $AXBE$, як вказано на *малюнку 16*. Як відомо з шкільного курсу геометрії, сума квадратів довжин діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів довжин його сторін, тобто $2(AX^2 + BX^2) = AB^2 + EX^2$, звідки випливає рівність $2c^2 = a^2 + 4OX^2$, де O — точка перетину діагоналей паралелограма. Тоді $OX = \frac{\sqrt{2c^2 - a^2}}{2}$, причому дріб у правій частині останньої рівності не залежить від вибору точки X. Отже, кожна точка шуканого ГМТ віддалена від точки O на відстань $\frac{\sqrt{2c^2 - a^2}}{2}$, а це означає, що шукане ГМТ належить колу $S\left(O, \frac{\sqrt{2c^2 - a^2}}{2}\right)$.

Пропонуємо читачеві самостійно довести, що кожна точка кола S належить шуканому ГМТ, тобто шукане ГМТ і коло S співпадають. **Дослідження:** задача має єдиний розв'язок при умові, що $a^2 \le 2c^2$ або $a \le c\sqrt{2}$. Якщо $a = c\sqrt{2}$, то ГМТ вироджується в точку O, якщо $a = c$, то шукане ГМТ є колом з діаметром AB.

Побудова цього ГМТ зводиться до побудови відрізка, довжина якого дорівнює $\frac{\sqrt{2c^2 - a^2}}{2}$, що потребує застосування алгебраїчного методу. Цей відрізок можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки. Спочатку будуємо відрізок з довжиною $b = c\sqrt{2}$ (приклад 1). Потім будуємо відрізок довжиною $d = \sqrt{b^2 - a^2}$ (катет трикутника з гіпотенузою, що має довжину b, і другий катет, що має довжину a). Останній відрізок ділимо навпіл і одержуємо відрізок потрібної довжини. Після цього будуємо точку O і коло S. ■



Мал. 16



Мал. 17

Зауваження. Щоб встановити, чим є шукане ГМТ, часто застосовують метод координат. Застосуємо його до розв'язування останнього прикладу. Оберемо на площині прямокутну систему координат XOY і розмістимо точки A і B так, як вказано на *малюнку 17*. Нехай точка X з координатами x, y належить шуканому ГМТ. Тоді, використовуючи формулу для відстані між двома точками, одержуємо рівняння, якому задовольняють координати точки X: $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + 2y^2 = c^2$. Здійснивши очевидні перетворення, одержуємо рівняння $x^2 + y^2 = \frac{2c^2 - a^2}{4}$, яке визначає коло з центром у початку координат при умові, що $a \le c\sqrt{2}$. Якщо $a = c\sqrt{2}$, то одержується коло нульового радіуса. Таким чином, шукане ГМТ належить цьому колу. Далі встановлюється, що кожна точка цього кола належить шуканому ГМТ. Побудова ГМТ здійснюється так, як було вказано вище.

Приклад 7. *Побудувати ГМТ, різниця квадратів відстаней від кожної з яких до двох даних точок A і B є стале число, що дорівнює квадрату довжини даного відрізка KM.*

Розв'язання. Довжини відрізків AB та KM позначимо через a та c відповідно. Нехай точка X належить шуканому ГМТ. Це означає, що $AX^2 - BX^2 = c^2$. Нехай точка P є основою перпендикуляра, опущеного з точки X на пряму AB (*мал. 18*). Справджуються наступні очевидні рівності: $AX^2 = AP^2 + PX^2$,